CORSO ZERO
di Matematica
CdL Scienze Biologiche

Lezione 2

Fattorizzazione di un polinomio e Teorema del Resto

Fattorizzazione di un polinomio
e Teorema del Resto

<u>Osservazione</u> Sia $P(x)$ un polinomio

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \text{——} + a_n x^n$$

voglio trovare gli zeri (o <u>radici</u>) del polinomio $P(x)$

<u>Def</u> $x_0 \in \mathbb{R}$ si dice <u>radice</u> di $P(x)$

sostituito all'incognita x

si sostituisce all'incognita x annulla il polinomio – ossia

$$P(x_0) = 0,$$

$$\iff \boxed{a_0 + a_1 x_0 + \dots + a_n x_0^n = 0}$$

Teorema di Gauss

Ogni polinomio reale può sempre decomporsi nel prodotto di fattori o di primo grado o di secondo grado irriducibili (a meno della loro molteplicità)

Es $$P(x) = (a_1 x + b_1)(a_2 x + b_2) \cdots (a_p x + b_p)$$

$$\cdot (c_1 x^2 + d_1 x + e_1) \cdots$$

$$\cdots (c_s x^2 + d_s + e_s)$$

$c_i x^2 + d_i x + e_i$ sono irriducibili, ossia non possono decomporsi ulteriormente come prodotto di fattori di 1° grado

Ritornando all'eq.ne $\boxed{P(x) = 0}$

Per risolvere tale equazione polinomiale, attraverso il teorema di Gauss, :

$$P(x) = 0$$

$$\Longleftrightarrow (a_1x+b_1)\cdots(a_px+b_p)(c_1x^2+d_1x+e_1)\cdots(c_sx^2+d_sx+e_s)=0$$

Da qui si utilizza la legge di annullamento di un prodotto

<u>ossia</u>

$$a \cdot b = 0 \Longleftrightarrow a=0 \text{ opp. } b=0$$

Teorema del Resto

Le eventuali radici razionali di un polinomio $P(x)$ (ossia i valori razionali che sostituiti alla x annullano il polinomio) sono da cercare tra i divisori del termine noto, presi sia con il segno positivo (+) sia con il segno negativo (−), o tra i rapporti fra tali divisori e quelli del coefficiente del termine di grado massimo.

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$$

$a_0 = 2 \cdot 5 \cdots$ cerco le radici tra $\pm 1, \pm 2, \pm 5 \dots$

$a_n = 3 \cdot 5 \cdots$ ma anche $\pm \frac{2}{5}, \pm \frac{5}{3} \dots$

Oss se x_0 è radice di $P(x)$

$$\Longleftrightarrow \boxed{P(x) = (x - x_0)\, Q(x)}$$

dove il grado $Q(x)$ = grado $P - 1$

Esempio $P(x) = x^5 - 1$

termine noto $= -1$
coeff. grado max $= +1$

Controllo con i numeri $+1$ e -1

$$P(1) = 1^5 - 1 = 1 - 1 = 0$$

$$\Longrightarrow \quad x^5 - 1 = (x-1) \cdot Q(x)$$

grado $Q = 4$

Individuiamo $Q(x)$ attraverso Ruffini

$$
\begin{array}{c|ccccc|c}
 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
1 & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
\hline
 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \#
\end{array}
$$

somma

prodotto

radice ottenuta

termine noto

coefficienti di Q(x)

grado 4

grado 3

- - -

$$Q(x) = 1 \cdot x^4 + 1 \cdot x^3 + 1 \cdot x^2 + 1 \cdot x + 1$$

$$= x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

Teorema del Resto : controllo se

$+1$ e/o -1 sono radici

$$Q(-1) = (-1)^4 + (-1)^3 + (-1)^2 + (-1) + 1$$

$$= 1 \cancel{-1} + 1 \cancel{-1} + 1 = 1$$

$$Q(1) = 5 \neq 0$$

<u>Esempio</u> $\quad P(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$

$$6 = 1 \cdot 2 \cdot 3$$

Dal teorema del Resto, le eventuali radici vanno cercate fra

$\pm 1 \quad , \quad \pm 2 \quad , \quad \pm 3 \; , \; \pm 6$

$$P(1) = 1^3 + 6 \cdot 1^2 + 11 \cdot 1 + 6 = 24 \neq 0$$

$$P(-1) = (-1)^3 + 6 \cdot (-1)^2 + 11 \cdot (-1) + 6$$

$$= -1 + 6 - 11 + 6$$

$$= 12 - 12 = 0$$

-1 è radice di $P(x)$, uso Ruffini

$$\begin{array}{c|ccc|c}
 & 1 & 6 & 11 & 6 \\
 & & & & \\
-1 & & -1 & -5 & -6 \\
\hline
 & 1 & 5 & 6 & \#
\end{array}$$

$1 \qquad 5 \qquad 6$

$$\Rightarrow x^3+6x^2+11x+6 = \underbrace{(x+1)}_{}\,(x^2+5x+6)$$

$(x-(-1))$

<u>**Oss**</u> Per trovare radici di un polinomio di 2° grado

$$x^2+sx+p = (x-x_1)(x-x_2)$$

$$= x^2-(x_1+x_2)x+x_1\cdot x_2$$

Quindi deve accadere

$$\begin{cases} x_1+x_2 = -s \end{cases}$$

$$\begin{cases} \\ x_1 \cdot x_2 = P \end{cases}$$

le due radici, se esistono, sono tali che il prodotto è uguale al termine noto mentre la somma deve essere l'opposto del coefficiente di 1° grado

Es $\quad x^2 - 17x + 30$

$$30 = 15 \cdot 2 = 3 \cdot 10 = 6 \cdot 5$$

ma $\quad 15 + 2 = -(-17)$

$\Rightarrow$ le radici saranno $x_1 = 15$

$x_2 = 2$

Equazioni di 1° grado

$$ax + b = 0 \qquad (\text{con } a \neq 0)$$

con $a, b \in \mathbb{R}$

$$ax = -b$$

ottenendo (essendo $a \neq 0$)

$$\boxed{x = -\frac{b}{a}}$$

Esempio

$$2(3x+1) - 3(2x+1) = 4(x-1) - (4x+3)$$

$$\cancel{6x} + 2 - \cancel{6x} - 3 = \cancel{4x} - 4 - \cancel{4x} - 3$$

$$-1 = -7 \iff 6 = 0$$

$\boxed{Sol: \emptyset}$ Nessuna soluzione

Esempio

$$3(2x+1) - 2(3x+1) = 4x - 3 - 4(x-1)$$

$$\cancel{6x} + 3 - \cancel{6x} - 2 = \cancel{4x} - 3 - \cancel{4x} + 4$$

$$1 = 1 \iff 0 = 0$$

<u>Sol</u> $\forall x \in \mathbb{R}$

<u>Esempio</u> $$(x+2)^2 - 6(x-1) = 2x + (x-1)^2$$

$$x^2 + \underline{\underline{4x}} + \underline{4} - \underline{\underline{6x}} + \underline{6} = 2x + x^2 - 2x + 1$$

$$\cancel{x^2} - 2x + 10 - \cancel{2x} - \cancel{x^2} + \cancel{2x} - 1 = 0$$

$$-2x + 9 = 0$$

$$-2x = -9$$

Sol $\boxed{x = \frac{9}{2}}$

Equazione di 2° grado

Siano $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$

voglio risolvere l'eq.ne

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Ricordo: $y^2 - z^2 = (y-z)(y+z)$

$$0 = ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$$

$$= a\left(\underbrace{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}}_{\left(\frac{b}{2a}\right)^2}\underbrace{-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}}_{}\right)$$

$$= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$$

se riesco a scriverla
come un quadrato

$\Longrightarrow \quad y^2 - z^2 = (y-z)(y+z)$

<u>Caso 1</u> se $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac > 0}$

$$= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right] =$$

$$= a\left[\left(x+\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right]$$

legge di annullamento del prodotto

$$\Rightarrow \begin{cases} x+\dfrac{b}{2a}-\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}=0 & (1) \\[2ex] x+\dfrac{b}{2a}+\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}=0 & (2) \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow (1) \quad x = -\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$(2) \quad x = -\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Riassumendo se $\Delta = b^2-4ac > 0$

Sol $\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$

ottenianmo due soluzioni distinte

Caso 2 $\Delta = 0$

Riprendo

$$0 = ax^2+bx+c = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

$$= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\right]$$

Sol $x+\frac{b}{2a} = 0$

$$\Longleftrightarrow \quad \boxed{x = -\frac{b}{2a}}$$

una soluzione contata 2 volte

Caso 3 $\quad \Delta < 0$

$$0 = ax^2+bx+c = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

si ha: $\quad \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$

Sempre

e $\quad -\frac{\Delta}{4a^2} > 0$

Quindi

$$0 = \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \left(-\frac{\Delta}{4a^2}\right) \geq -\frac{\Delta}{4a^2} > 0$$

impossibile

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{Sol}} \quad \nexists \ x \in \mathbb{R}$$

$\nexists$ = nessuna (non esiste)

$$\boxed{Sol \ \emptyset}$$

Esempio

$$(x-3)(x+3)-(2x-1)^2+14=0$$

$$x^2-9-(4x^2-4x+1)+14=0$$

$$x^2 - 9 - (4x^2 - 4x + 1) + 14 = 0$$

$$x^2 - 9 - 4x^2 + 4x - 1 + 14 = 0$$

$$-3x^2 + 4x + 4 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 4(-3)4$$

$$= 16 + 16 \cdot 3$$

$$= 16(1+3) =$$

$$= 16 \cdot 4 =$$

$$= 4^3 > 0$$

2 soluzioni distinte:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} =$$

$$= \frac{-4 \pm \sqrt{4^3}}{-6} =$$

$$= \frac{2 \mp 4}{3} = \begin{cases} 2 \\ -\frac{2}{3} \end{cases}$$

Esempio

$$\frac{x^2-4x+6}{x^2-3x+2} - \frac{2x}{x-2} = 1 - \frac{26+x}{x-1}$$

$$\boxed{CE} \quad \begin{cases} x^2-3x+2 \neq 0 & 1 \\ x-2 \neq 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases}$$

1 $\quad x^2-3x+2=0$

$$\Delta = 9-8=1$$

$$x = \frac{3 \pm 1}{2} =$$

1 $\quad x \neq 1, 2$

$$= \begin{cases} 2 \\ \end{cases}$$

2

(2) $x \neq 2$

(3) $x \neq 1$

CE $\boxed{x \neq 1, 2}$

Riprendo l'equazione

$$\frac{x^2-4x+6}{\underbrace{x^2-3x+2}_{(x-2)(x-1)}} - \frac{27}{x-2} - 1 + \frac{26+x}{x-1} = 0$$

<u>Nota</u> : $x^2-3x+2 = (x-1)(x-2)$

$$\frac{x^2-4x+6-27(x-1)-(x^2-3x+2)+(26+x)(x-2)}{(x-2)(x-1)} = 0$$

$$(x-2)(x-1)$$

$$\frac{x^2 - 4x + 6 - 27x + 27 - x^2 + 3x - 2 + 26x - 52 + x^2 - 2x}{(x-2)(x-1)} = 0$$

<u>Osserviamo</u> $\qquad \dfrac{a}{b} = 0 \iff a \cdot \dfrac{1}{b} = 0$

$\left(\text{essendo } \dfrac{1}{b} \neq 0\right) \iff \boxed{a = 0}$

$\iff x^2 - 4x + 6 \cancel{- 27x} + 27 \cancel{- x^2} \cancel{+ 3x} - 2 \cancel{+ x^2} + 26x - 52$

$$x - 4x + 6 - 2x\,x + 2x - 7x + 3x - 2 + x + 24x - 30$$

$$= 0$$

$$x^2 - 4x - 21 = 0$$

$$\Delta = 4^2 + 4 \cdot 21 > 0$$

Sol

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{4(4+21)}}{2}$$

$$= 2 \pm \sqrt{25} = 7$$

-3

Ricordo: esse sono accettabili perché diverse da 1 e 2

Disequazioni di 1° grado

Sia $a \neq 0$

Studiamo $\quad ax + b > 0$

$$ax > -b$$

Caso 1 $\quad a > 0 \quad \boxed{x > -\frac{b}{a}}$

Sol $\quad \left] -\frac{b}{a}, +\infty \right[$

caso 2 $\quad a<0$

$$x < -\frac{b}{a}$$

Sol $\quad \left] -\infty, -\frac{b}{a} \right[$

Esempio

$$-\frac{2x-1}{3} + 1 < \frac{1}{2} - \frac{3-2x}{6}$$

$$\frac{-2x-1}{3} + 1 - \frac{1}{2} + \frac{3-2x}{6} < 0$$

m.c.m $\frac{(-2x-1)\cdot 2+6-3+(3-2x)}{6}<0$

dalla regola dei segni, il numeratore deve avere segno discorde dal denominatore.

Da cui

$$-4x-2+6-\cancel{3}+\cancel{3}-2x<0$$

$$-6x+4<0$$

$$-6x<-4$$

$$\Longleftrightarrow \quad x>\frac{4}{6}$$

Sol

$$\left]\frac{2}{3}, +\infty\right[$$